MÉMOIRE
SUR LA PLUS GRANDE ÉQUATION DES PLANETES,
PAR Mr. EULER.

Traduit du Latin.

CE QUE L'ON enſeigne en Aſtronomie ſur l'equation du centre de chaque Planete, regarde les lieux heliocentriques, où ces Planetes ſeroient vûes par un Spectateur placé au centre du Soleil. Car quelqu'inégalité qu'il paroiſſe y avoir dans la marche des Planetes pour nous qui habitons la Terre, & aux yeux desquels elles ſemblent aller, tantot plus vîte, tantot plus lentement, tantot s'arrêter comme immobiles au même point du Ciel, tantot même rebrouſſer chemin, & devenir retrogrades; cependant les Aſtronomes ont remarqué, que ſi les mouvemens des Planetes etoient obſervés du Soleil, ces inégalités diſparoitroient preſque entierement. Un ſpectateur placé dans cet Aſtre ne verroit jamais les Planetes immobiles ni retrogrades, mais elles auroient à ſes yeux un cours perpetuel & direct ſuivant l'ordre des ſignes. Neanmoins ce mouvement ne ſeroit pas tout à fait uniforme, mais il y reſteroit quelque inegalité tellement inhérente à la vîteſſe, que la

même Planete ſeroit obſervée allant, quelquefois plus vîte, quelquefois plus lentement ; & c'eſt cette inegalité de mouvement que les Tables Aſtronomiques ont coutume de déſigner par *l'equation du Centre.*

II. Outre cela les Planetes, comme on les voit de la Terre, en raiſon de leur diſtance à notre égard, ne ſemblent presque ſuivre aucune Loi certaine, quoiqu'il ſoit trés difficile de déterminer leurs diſtances par les ſeules obſervations. Mais ſi l'on rapporte les mouvemens des Planetes au Soleil, & qu'on les repréſente tels qu'ils paroîtroient au ſpectateur ſuppoſé dans le Soleil, alors il ne reſtera presque plus d'anomalie dans les diſtances. Car dans chaque révolution chaque Planete ſera une fois dans la plus grande diſtance du Soleil, & une fois dans la plus grande proximité ; leſquels deux points ſeront diametralement oppoſés l'un à l'autre & immuables dans le Ciel. Alors les intervalles de tems, pendant leſquels la Planete parvient de la diſtance la plus grande à la moindre, & retourne enſuite à la plus grande, ſeront conſtamment égaux entr'eux. Le point du Ciel, dans lequel la Planete paroit le plus éloignée du Soleil, s'appelle ſon *Aphelie*, & le point oppoſé où elle eſt le plus voiſine du Soleil, ſon *Peribélie.* Et le tems que la Planete partie de l'Aphelie ou du Perihélie, employe à y retourner, eſt nommé ſon *temps periodique.*

III. La diversite' des diſtances de chaque Planete au Soleil conſerve un rapport admirable & conſtant avec l'inegalité de ſon mouvement, tel qu'il eſt vu du Soleil. Car lorſque la Planete eſt plus eloignée du Soleil, elle va plus lentement, & quand elle s'approche davantage de cet Aſtre, ſa courſe eſt plus rapide. C'eſt ce qui a fait découvrir a Kepler cette belle Loi, que Newton a demontrée

montrée depuis par les Principes de la Méchanique, c'eſt que chaque Planete dans des tems égaux décrit autour du Soleil, non des angles égaux, mais des aires égales. Il en réſulte auſſi avec une evidence inconteſtable que les Planetes font leurs révolutions autour du Soleil dans des Ellipſes, dans un des foyers desquelles le Soleil lui même eſt placé, & que l'inegalité du mouvement eſt tellement reglée, que dans cette ellipſe ſont conſtamment décrites en tems égaux des aires égales, qui ſont coupées par des lignes droites tirées de la Planete au Soleil.

IV. La premiere choſe qu'on infère de cette régle, c'eſt que plus il y a de diſſérence entre la plus grande & la moindre diſtance de la même Planete au Soleil, plus ſon mouvement vu du Soleil paroit inégal. Au lieu que ſi une Planete conſervoit toujours la même diſtance à l'egard du Soleil, c'eſt à dire, qu'elle ſe mût dans un cercle dont le Soleil fut le centre, alors ſon mouvement ſeroit ſi égal, qu'en tems égaux elle décriroit non ſeulement des aires egales, mais auſſi des angles égaux. Dans ce cas donc on pourroit trés aiſément par le moyen de la regle de trois determiner la rélation du lieu d'une Planete au Soleil pour un tems quelconque. Mais comme cette condition n'a lieu dans aucune Planete, on a coutume de concevoir idealement à chaque Planete une autre Planete qui lui ſerve comme de compagne, & qui faſſe ſa revolution autour du Soleil dans le même tems periodique, mais avec un mouvement uniforme. On ſuppoſe de plus que cette Planete feinte paroit au même point du Ciel avec la véritable, lorsque celle-ci eſt à l'Aphelie ou au Perihélie. Apres donc que ces deux Planetes ont paſſé par l'aphelie, la Planete feinte paroitra aller plus vîte que la veritable; or celle cy augmentera inſenſiblement ſa vîteſſe jusqu'à ce qu'elle aura atteint la

feinte au Perihélie. Alors elle la ſurpaſſera en vîteſſe, & la laiſſera en arriere, jusqu'à ce qu'elles ſe rejoignent de nouveau à l'Aphelie. A l'exception donc de ces deux points, l'Aphelie & le Perihélie, ces deux Planetes ſeront perpetuellement ſeparées l'une de l'autre; & la difference entre le lieu de la Planete vraye & celui de la feinte eſt ce qu'on appelle l'equation du centre de la Planete, ou la Proſtaphereſe. Comme il eſt donc facile d'aſſigner pour un tems quelconque le lieu de la Planete feinte, ſi outre cela l'equation, que les Tables Aſtronomiques fourniſſent, eſt connüe, on connoitra par là le lieu de la vraye Planete.

V. Les Astronomes appellent *Anomalie moyenne* la diſtance de la Planete feinte à l'Aphelie, ou l'angle ſous lequel cette Planete dans l'eloignement de l'Aphelie, eſt vuë du Soleil. On peut la déterminer aiſément par le tems qui s'eſt ecoulé depuis le paſſage de la Planete par l'Aphelie. L'Anomalie vraye c'eſt la diſtance de la Planete vraye à l'Aphelie, ou l'angle ſous lequel cette Planete dans l'eloignement de l'Aphelie eſt vuë du Soleil. Quand donc la Planete s'avance de l'Aphelie au Perihélie, on trouve l'anomalie vraye en ſouſtraiſant l'equation du centre de l'anomalie moyenne; au contraire lorsque la Planete retourne du Perihélie à l'Aphelie, il faut ajouter l'equation à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraye. Alors on peut déterminer par l'anomalie moyenne ou par la vraye, la veritable diſtance de la Planete au Soleil; & par conſéquent ſi l'on determine le lieu de la Terre vu du Soleil pour le même tems, la Trigonometrie fournit le lieu où la Planete vuë de la Terre doit paroître, ou ſon lieu Geocentrique.

VI. L'Equation du centre etant donc nulle, lorsque la Planete ſe trouve, ou au Perihélie, ou à l'Aphelie, il faut neceſſaire-

ment

ment que cette equation croiſſe, lorsque la Planete s'avance en quittant ces lieux, & qu'enſuite elle décroiſſe de nouveau. Il y aura donc un lieu où cette equation ſera la plus grande. Il naît de là pluſieurs queſtions trés importantes en Aſtronomie: premierement qu'elle eſt pour chaque Planete la plus grande équation, & à quelle anomalie moyenne cette plus grande équation répond? Enſuite, comme la plus grande équation eſt déterminée par l'excentricité de l'orbite de la Planete, laquelle eſt la fraction qui a pour numerateur la diſtance des foyers de l'ellipſe, & pour dénominateur le grand Axe de l'ellipſe? Et réciproquement il faudra déterminer l'excentricité par la plus grande équation. Je vais donc examiner ces queſtions, dont la ſolution rigoureuſe n'exiſte encore nulle part.

VII. Soit donc la moitié de l'axe transverſe de l'orbite de chaque Planete $= a$, ce que l'on a coutume d'appeller auſſi en Aſtronomie la diſtance moyenne de la Planete au Soleil; & que l'excentricité ou la diſtance des foyers diviſée par l'axe transverſe, ſoit $= n$, laquelle evanouit, ſi l'orbite de la Planete ſe change en cercle, mais croit auſſi d'autant plus que cette orbite s'éloigne du cercle. Et ſi cela va à l'infini, en ſorte que l'orbite devienne une parabole, alors l'excentricité n deviendra egale à l'unité, mais dans les hyperboles elle ſurpaſſera l'unité. L'axe transverſe etant $= 2a$, la diſtance des foyers ſera $= 2an$, & la diſtance de l'un & l'autre foyer au centre $= an$. Par conſequent la diſtance de l'Aphelie au Soleil ſera $= a + an = a(1+n)$ & la diſtance du Perihélie au Soleil $= a - an = a(1-n)$. Alors le demi-axe conjugué ſera $= a\sqrt{(1-nn)}$ & la moitié du parametre $= a(1-nn)$.

VIII. Ces choses etant ſuppoſées, ſoit pour un tems donné depuis le paſſage de la Planete par l'Aphelie l'anomalie moyenne

$= x$, & l'anomalie vraye qui y répond $= z$; l'equation du centre, comme nous l'avons vu, ſera $= x - z$. Soit de plus la diſtance de la Planete au Soleil $= r$, pour exprimer le rapport entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraye, il faudra appeller au ſecours un nouvel angle tenant une eſpece de milieu entre x & z, que Kepler a nommé l'anomalie excentrique. Soit donc cette anomalie excentrique $= y$, & que par ſon moyen, en ſuivant la methode que j'ai amplement expoſée ailleurs, on détermine tant l'anomalie moyenne x, que la véritable z, avec la diſtance r, en ſorte que x ſoit $= y + n \sin y$; $\cos z = \frac{n + \cos y}{1 + n \cos y}$; & $r = a(1 + n \cos y)$. Par conſéquent on aura $\sin z = \frac{\sin y \sqrt{(1-nn)}}{1 + n \cos y}$ & $\tang z = \frac{\sin y \cdot \sqrt{(1-nn)}}{n + \cos y}$; d'où par l'anomalie excentrique y, on trouve l'anomalie moyenne & vraye, & la diſtance de la Planete au Soleil. Avec ces formules il eſt aiſé de calculer les Tables Aſtronomiques pour le mouvement des Planetes.

IX. Avant que de rechercher la plus grande équation, il ſera à propos de reſoudre la queſtion ſuivante qui peut avoir quelque utilité en Aſtronomie.

Trouver l'anomalie moyenne & la vraye, auxquelles répond la diſtance de la Planete au Soleil, égale à la diſtance moyenne a.

Comme ici r doit etre $= a$, il faudra que $\cos y = o$, & par conſéquent l'anomalie excentrique y ſera $= 90°$. On tire donc de là l'anomalie moyenne $x = 90° + n$. Pour cet effet le ſinus total ou le rayon etant ſuppoſé ici egal à l'unité, on doit chercher dans

un

un ſemblable cercle l'arc $= n$, & l'angle qui ſe meſure par cet arc, doit etre ajouté à 90°. pour trouver l'anomalie moyenne cherchée x; ou bien, comme n eſt un nombre moindre que l'unité, il faut le traitter comme ſinus, & ſouſtraire 4, 6855749, de ſon logarithme; le nombre qui répond au logarithme qui reſte fournira l'angle n exprimé en ſecondes. Mais l'anomalie vraye z qui répond à cette anomalie excentrique $y = 90°$ ſera telle que $\cos z = n$, & $z = A \cos n = 90° - A \sin n$. Soit m l'angle dont le ſinus $= n$, & on aura $z = 90° - m$ & l'equation du centre dans ce cas ſera $= n + m = n + A \sin n$. C'eſt pourquoi ſi la diſtance de la Planete au Soleil r ſe trouve egale à la diſtance moyenne au Soleil, ce qui arrive quand la Planete eſt dans l'axe conjugué de l'orbite, alors l'anomalie moyenne x ſera $= 90° + n$, l'anomalie vraye $z = 90° - A \sin n$, & l'equation $= n + A \sin n$.

X. J'AI FAIT préceder ce Problême, parce que dans ce cas l'equation $n + A \sin n$ ne differe presque pas ſenſiblement de la plus grande équation, ſi l'excentricité n ſe trouve fort petite, ce qui arrive presque dans toutes les Planetes. C'eſt dans cette ſource que j'ai puiſé la ſolution des Problêmes ſur la plus grande équation que j'ai joints à la Diſſertation ſur le mouvement des Planetes & ſur l'orbite du Soleil, dans le T. VII. des Mémoires de l'Acad. de Petersbourg. Car l'anomalie vraye, comme je l'ai montré dans cet endroit, pouvant etre exprimée par une ſerie infinie, de la maniere ſuivante,

$$z = y - n \sin y + \frac{1}{4} n n \sin 2y - \frac{1}{3.4} n^3 (\sin 3y + 3 \sin y) +$$

$$\frac{1}{4.8.} n^4 (\sin 4y + 4 \sin 2y) - \frac{1}{5.16} n^5 (\sin 5y + 5 \sin 3y +$$

$$10 \sin y)$$

10 ſin y) $+ \frac{1}{6.32} n^6$ (ſin 6 y $+$ 6 ſin 4 y $+$ 15 ſin 2 y) &c.
Si n eſt une fraction fort petite, z ſera presque $= y - n$ ſin y, & parce que x eſt $= + n$ ſin y, l'equation ſera $= 2n$ ſin y, qui ſera par conſéquent la plus grande, ſi y eſt $= 90°$, dans lequel cas r devient auſſi, comme nous l'avons vu $= a$. Cependant cette détermination, ſi l'excentricité de la Planete eſt un peu conſiderable, comme cela arrive en Mercure, s'eloignera un peu de la verité, mais ſurtout quand il ſera queſtion de déterminer le tems periodique de quelque Comete, & de renfermer le mouvement de la Comete dans des Tables à la façon des Planetes. Car alors cette détermination s'ecartera beaucoup de la verité ; & la plus grande équation ſera conſiderablement eloignée du lieu, où la diſtance de la Planete au Soleil eſt égale au demi-axe transverſe.

XI. Pour tous ces cas donc il faut déduire la plus grande équation par la methode même de *maximis* & *minimis*, plutot que de formules qui ne ſont vrayes qu'à peu près. Ainſi, comme pour déterminer l'anomalie moyenne & la vraye, il faut auparavant connoitre l'anomalie excentrique, je commencerai par le Problême ſuivant.

Etant donné l'excentricité d'une Planete n, *trouver l'anomalie excentrique, à laquelle répond la plus grande équation.*

Puisqu'en ſuppoſant l'anomalie moyenne $= x$, & l'anomalie vraye $= z$, l'equation du centre eſt $= x - z$, cette equation deviendra la plus grande, lorsque $dx - dz$ ſera $= o$, ou $dx = dz$. Or nommant l'anomalie excentrique $= y$, nous aurons comme nous l'avons vû ci-deſſus, $x = y + n$ ſin y & cof $z = \frac{n + \text{cof } y}{1 + n \text{ cof } y}$,

d'où

d'où en differentiant réſulte $dx = dy + n\,dy \cos y$ & $-dz \sin z = \frac{-dy \sin y + nn\,dy \sin y}{(1+n\cos y)^2}$, ou bien, $dz \sin z = \frac{(1-nn)\,dy \sin y}{(1+n\cos y)^2}$.

Mais $\sin z$ eſt $= \frac{\sqrt{(1-nn)}\sin y}{1+n\cos y}$, & par conſequent nous aurons $dz = \frac{dy\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos y}$. Comme donc dx doit etre $= dz$, on aura cette équation $1+n\cos y = \frac{\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos y}$, & ainſi $1+n\cos y = \sqrt[4]{(1-nn)}$ & $\cos y = \frac{\sqrt[4]{(1-nn)}-1}{n}$. Soit donc $y = 90° + \lambda$, & il y aura $\sin\lambda = \frac{1-\sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$, ou $\sin\lambda = \frac{n}{(1+\sqrt[4]{(1-nn)})\,(1+\sqrt{(1-nn)})}$, par où il paroit que l'anomalie excentrique eſt un peu plus grande que dans le cas precedent, où elle etoit $y = 90°$.

XII. Soit donc comme auparavant $n = \sin m$, & on aura $\sqrt{(1-nn)} = \cos m$, & à cauſe de l'excentricité l'angle m ſera donné. Donc nous aurons $\sin\lambda = \frac{1-\sqrt{\cos m}}{\sin m}$, & $\cos\lambda = \frac{\sqrt{(2\sqrt{\cos m} - \cos m - \cos m^2)}}{\sin m}$. Mais ſi l'excentricité n ſe trouve beaucoup moindre que l'unité, comme cela arrive dans toutes les Planetes, on aura $\sqrt[4]{(1-nn)} = 1 - \frac{1}{4}n^2 - \frac{1.3}{4.8}n^4 -$

$\frac{1.3.7}{4.8.12} n^6 - \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16} n^8$ &c. Et par conſéquent l'angle λ, par lequel l'anomalie excentrique y ſurpaſſe l'angle droit, s'exprimera de ſorte que ſoit

$$\text{ſin } \lambda = \frac{1}{4} n + \frac{1.3}{4.8} n^3 + \frac{1.3.7}{4.8.12} n^5 + \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16} n^7 + \text{&c.}$$

& ainſi par l'excentricité donnée on trouve aiſement l'angle λ, & par celui-ci l'anomalie excentrique $y = 90° + \lambda$. On infère encore de là le coſinus de cet angle λ.

$$\text{coſ } \lambda = 1 - \frac{1}{32} n^2 - \frac{49}{2048} n^4 - \frac{1233}{65536} n^6 - \text{&c.}$$

XIII. L'ANOMALIE excentrique y, à laquelle répond la plus grande équation etant préſentement trouvée, on pourra déterminer par là l'anomalie moyenne & la vraye; mais il eſt expedient de les chercher chacune à part.

Etant donnée l'excentricité n, *trouver l'anomalie moyenne, à laquelle répond la plus grande équation.*

L'anomalie excentrique pour ce cas etant $y = 90° + \lambda$ & $\text{ſin } \lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 - nn)}}{n}$ à cauſe de $x = y + n \text{ ſin } y$, on aura $x = 90° + \lambda + n \text{ coſ } \lambda$. Mais ſi nous voulons exprimer l'excés de cet angle au déſſus de 90° par n, parce que λ eſt $= \text{ſin } \lambda + \frac{1}{6} \text{ ſin } \lambda^3 + \frac{3}{40} \text{ ſin } \lambda^5 + \text{&c.}$ on aura

$$\lambda = \frac{1}{4} n + \frac{37}{384} n^3 + \frac{2363}{40960} n^5 + \text{&c.}$$

laquelle

laquelle valeur etant ſubſtituée à la place de λ & de cof λ trouvé ci-deſſus, l'anomalie moyenne ſera

$$x = 90° + \frac{5}{4} n + \frac{25}{384} n^3 + \frac{1383}{40960} n^5 + \text{&c.}$$

Mais ſi n n'eſt pas une quantité ſi petite que ces ſeries ſoient aſſez convergentes, alors il conviendra de ſe ſervir de l'expreſſion premierement trouvée $x = 90 + \lambda + n \cof \lambda$, qui s'accommode aiſément au calcul.

XIV. Avant que la plus grande équation puiſſe etre determinée, il faut auſſi rechercher l'anomalie vraye.

Etant donnée l'Excentricité, trouver l'anomalie vraye, à laquelle répond la plus grande équation.

L'anomalie excentrique pour ce cas eſt trouvée $y = 90° + \lambda$, étant $\sin \lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 - nn)}}{n}$. Par conſéquent en ſuppoſant l'anomalie vraye $= z$, on aura

$$\cof z = \frac{n + \cof y}{1 + n \cof y} = \frac{n + \cof y}{\sqrt[4]{(1 - nn)}} = \frac{n - \sin \lambda}{\sqrt[4]{(1 - nn)}}.$$

Lequel coſinus etant affirmatif fait voir que $z < 90°$. Soit donc $z = 90° - \mu$, & il ſera $\sin \mu = \frac{n - \sin \lambda}{\sqrt[4]{(1 - nn)}} = \frac{nn - 1 + \sqrt[4]{(1 - n^2)}}{n \sqrt[4]{(1 - nn)}}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sqrt[4]{(1 - nn)^3}$. Et de là par l'excentricité on trouvera l'angle μ. Mais ſi n eſt une fraction fort petite, on aura presque

$$\sqrt[4]{(1-nn)^3} = 1 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{3.1}{4.8}n^4 - \frac{3.1.5}{4\,8.12}n^6 - \frac{3.1.5.9}{4\,8.12.16}n^8 - \&c.$$

d'où réſultera

$$\text{ſin } \mu = \frac{3}{4}n + \frac{3}{32}n^3 + \frac{5}{128}n^5 + \frac{45}{2048}n^7 + \&c.$$

Et l'angle même μ ſe déterminera par la formule : $\mu = \text{ſin } \mu + \frac{1}{6}\text{ſin } \mu^3 + \frac{3}{40}\text{ſin } \mu^5 + \&c.$ Par conſéquent on aura

$$\mu = \frac{3}{4}n + \frac{21}{128}n^3 + \frac{3409}{40960}n^5 + \&c.$$

XV. Si l'on ſouſtrait à préſent l'anomalie vraye de l'anomalie moyenne, il reſtera la plus grande équation elle même.

Etant donnée l'Excentricité de l'orbite de la Planete, trouver ſa plus grande équation.

Comme pour la plus grande équation on a trouvé l'anomalie moyenne

$$x = 90° + \lambda + n \text{ cof } \lambda, \text{ ayant trouvé ſin } \lambda = \frac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$$

& qu'on a auſſi trouvé l'anomalie vraye

$$z = 90° - \mu, \text{ \& ſin } \mu = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{(1-nn)^3}$$

la plus grande équation ſera $= \lambda + \mu + n \text{ cof } \lambda$. Mais ſi dans le cas où n eſt une fraction fort petite, on ſouhaite ſeulement l'equation la plus grande qui approche le plus du vrai, il réſultera des formules trouvées ci-deſſus :

$$2n + \frac{11}{48}n^3 + \frac{599}{5120}n^5 + \&c.$$

Mais

Mais quand la diſtance de la Planete au Soleil eſt égale au demi-axe transverſe, alors l'equation eſt $= n + A \sin n = 2n + \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{40}n^5 +$ &c. Ainſi la plus grande équation ſurpaſſe celle-ci d'une quantité $= \frac{1}{16}n^3 + \frac{43}{1024}n^5 +$ &c.

XVI. Puisque nous avons trouvé $1 + n \cos y = \sqrt[4]{(1-nn)}$, la diſtance de la Planete au Soleil, lorsque ſon équation eſt la plus grande, ſera, $r = a\sqrt[4]{(1-nn)}$, diſtance qui eſt toujours moindre que la moitié de l'axe tranſverſe. De là donc on peut aiſément déterminer par l'excentricité, tant la plus grande équation, que l'anomalie moyenne & la diſtance de la Planete au Soleil, à laquelle elle répond. Mais ſi la plus grande équation eſt donnée, qui ſoit $= m$, & qu'on en veuïlle réciproquement chercher l'excentricité n, le Probleme devient trés difficile, & ne peut etre réſolu que par approximation. Car on arrive à cette équation $m = \lambda + \mu + n \cos\lambda$, par laquelle il faut trouver la valeur de la quantité n; & il n'y a poinr d'autre voye pour y reüſſir, qu'en prenant d'abord diverſes valeurs à la place de n, & en déduiſant de là l'équation la plus grande. On découvrira en effet par ce moyen dabord les bornes entre leſquelles la vraye valeur de n eſt renfermée; & en ſuivant la même route, on rendra ces limites toujours plus erroites, jusqu'à ce qu'enfin par la régle des interpolations on puiſſe en tirer la vraye valeur de l'excentricité n.

XVII. Mais si l'excentricité n'eſt pas fort grande, de maniere que les formules ſuperieures, les plus proches du vrai, puiſ-

ſent etre employées ſans erreur, alors on pourra trouver directement l'excentricité par la plus grande équation donnée.

Etant donnée la plus grande équation trouver par ſon moyen l'excentricité de l'orbite de la Planete.

Soit la plus grande équation $= m$, & l'excentricité $= n$, on aura

$$m = 2n + \frac{11}{48} n^3 + \frac{599}{5120} n^5 + \&c.$$

d'où l'on tire par converſion

$$n = \tfrac{1}{2} m - \frac{11}{768} m^3 - \frac{587}{2^{16} \cdot 15} m^5 - \&c.$$

où il faut exprimer la plus grande équation m en parties de rayon, ce qui ſe fait en convertiſſant l'angle m en ſecondes, & en ajoutant au logarithme du nombre réſultant 4,6855749; car on aura ainſi le logarithme du nombre m. Mais l'anomalie moyenne x, à laquelle cette plus grande équation répond ſera

$$x = 90^\circ + \frac{5}{8} m - \frac{5}{2^9 \cdot 3} m^3 - \frac{1}{2^9 \cdot 5} m^5 - \&c.$$

On approchera donc aſſez exactement de cette anomalie moyenne, ſi à 90 degrés l'on ajoute cinq huitiemes parties de la plus grande équation.

XVIII. POUR FACILITER l'application de ces ſolutions au calcul Aſtronomique, prenons pour exemple l'orbite de Mercure, dont les Tables Aſtronomiques ſont l'excentricité $= \frac{797}{3871}$. On aura donc

$$n = 0,20589 \; ; \quad l\, n = 9,3136351.$$

Si donc la diſtance de Mercure au Soleil eſt égale à ſon demi-axe tranſverſe, ou que l'on faſſe l'anomalie excentrique $= 90^\circ$, l'ano-

l'anomalie moyenne x deviendra $= 90° + n$. D'où, pour trouver l'angle n.

de $l\,n$	$= 9,\ 3136351$
il faut ſouſtr.	$4,\ 6855749$
à ce logarithme	$4,\ 6280602$
repond ce nombre	$= 42468''$
d'où n	$= 11°,\ 47',\ 48''$

& ainſi l'anomalie moyenne $x = 3^{s},\ 11°,\ 47',\ 48''$. Mais l'anomalie vraye dans ce cas eſt $z = 90° - A$ ſin n. Or A ſin $n = 11°,\ 52',\ 54''$, d'où $z = 90° - 11°,\ 52'\ 54''$. Par là l'equation devient $= 23°,\ 40',\ 42''$, ce qui eſt presque deux minutes au deſſous de la plus grande équation.

XIX. Mais pour trouver la plus grande équation, qu'on faſſe le calcul ſuivant

$ln^2 = 8,\ 6272702$	$l(1-nn) = 9,\ 9811883$
$n^2 = 0,\ 0423906$	$l\sqrt[4]{(1-nn)} = 9,\ 9952971$
$1-n^2 = 0,\ 9576093$	$\sqrt[4]{(1-nn)} = 0,\ 989229$
	$1-\sqrt[4]{(1-nn)} = 0,\ 010771$
	$l\,(1-\sqrt[4]{(1-nn)}) = 8,\ 0322560$
	ſouſtr. $l\,n = 9,\ 3136351$
	l ſin $\lambda = 8,\ 7186209$
	Donc $\lambda = 2°\ 59'\ 55''$

Ainſi

Ainſi l'anomalie excentrique, à laquelle répond la plus grande équation eſt $y = 3^s, 2°, 59', 55''$. De plus pour trouver l'anomalie moyenne

qu'on prenne $l \cos\lambda = 9, 9994050$

$l\, n = 9, 3136351$

$9, 3130401$

ſouſtr. $4, 6855749$

$4, 6274652$

Donc $n \cos\lambda = 42409''$

ou $n \cos\lambda = 11° 46' 49''$

L'anomalie moyenne à laquelle la plus grande équation répond, etant donc $x = 90° + \lambda + n \cos\lambda$, on aura $x = 3^s, 14°, 46', 44''$, à quoi l'on trouve auſſi que répond dans les Tables la plus grande équation. De plus l'anomalie vraye eſt $z = 90° - \mu$ $\sin\mu$ etant $= \frac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3}}{n}$, d'où l'on déduit le calcul ſuivant

Etant $l \sqrt[4]{(1-nn)} = 9, 9952971$

ſera $l \sqrt[4]{(1-nn)^3} = 9, 9859913$

& $\sqrt[4]{(1-nn)^3} = 0, 9680356$

$1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3} = 0, 0319643$

$l\,(1 - \sqrt[4]{(1-nn)^3}) = 8, 5046652$

ſouſtr. $l\, n = 9, 3136351$

$l \sin\mu = 9, 1910301$

Donc $\mu = 8°, 55' 52''$

Ajout. $\lambda + n \cos\lambda = 14, 46, 44$

La plus grande équation $= 23°, 42' 36''$

laquelle

laquelle ne differe pas même d'une ſeconde de la plus grande équation repreſentée dans ces Tables, ce qui prouve qu'elles ont été calculées par la Theorie avec la derniere rigueur. Enfin comme le demi-axe tranſverſe de l'orbite de Mercure eſt $= 38710 = a$, on aura

$$\begin{aligned} l\,a &= 4,\ 5878232 \\ l\sqrt[4]{(1-nn)} &= 9,\ 9952971 \\ l\,r &= 4,\ 5831203 \end{aligned}$$

& r fera la diſtance de Mercure au Soleil, où ſon équation eſt la plus grande.

XX. Mais afin de pouvoir trouver réciproquement l'excentricité par la plus grande équation donnée, comme on ne ſauroit y parvenir que par des interpolations, j'ai cru devoir placer ici la Table ſuivante, dans laquelle on trouve pour chaques centiemes parties de l'unité, qui conſtituënt l'excentricité, tant les plus grandes équations, que les anomalies excentriques & moyennes, auxquelles répondent les plus grandes équations. La derniere colomne fournit auſſi le logarithme de la diſtance de la Planete au Soleil, où ſon équation eſt la plus grande. En effet en ſuppoſant cette diſtance $= r$, & le demi-axe tranſverſe $= a$, puisque $r = a\sqrt[4]{(1-nn)}$, la derniere colomne contient les logarithmes de la formule $\sqrt[4]{(1-nn)}$, qui etant ajoutés aux logarithmes de la diſtance moyenne, donneront le logarithme de la diſtance cherchée r.

XXI. Avec le secours donc de cette Table, etant donnée une excentricité quelconque, on trouvera par l'interpolation la plus grande équation qui lui convient. Ainſi l'excentricité pour l'orbite de la Terre etant $= 0,0169$, on trouve par la Table pour

	l'excentricité	la plus grande équation
	0, 0100	1°, 8′, 45″
	0, 0200	2 , 17 , 31
Differ.	0, 0100	1 , 8 , 46

Il n'y a qu'à ſouſtraire à préſent l'excentricité 0, 0100 de celle qui eſt propoſée 0, 0169, pour avoir la difference 0, 0069, & il en réſultera cette proportion :

$$100 : 1°, 8', 46'' = 69 : 47', 26''$$

En ajoutant cet angle trouvé 47′ 26″ à la moindre équation, 1°, 8′, 45″, on aura la plus grande équation de l'orbite de la Terre = 1°, 56′, 11″.

De même l'excentricité de Mars repréſentée dans les Tables eſt = 0, 092998. Qu'on tire donc de cette Table les deux excentricités les plus proches avec les plus grandes équations.

	Excentricités	La plus grande équation
	0, 090000	10, 19, 22
	0, 100000	11, 28, 20
Diff.	0, 010000	1, 8, 58

Or l'excentricité propoſée ſurpaſſe la moindre 0, 090000 de 0, 002998, d'où réſultera cette proportion

$$10000 : 1°, 8', 58'' = 2998 : 20', 40''.$$

Ajoutez cet angle 20′, 40″ à l'equation précedente, qui eſt 10, 19, 22, & l'on aura la plus grande équation de l'orbite de Mars = 10°, 40′ 2″ qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

XXII. Le principal uſage de cette Table ſera pour déterminer l'excentricité lorsque plus grande équation eſt connüe; & même ſans ce ſecours la queſtion eſt abſolument inſoluble. Pour le prouver par un exemple, prenons la plus grande équation de Mercure, que les Tables marquent $23°, 42' 40''$. Nous avons déja remarqué qu'elle s'accorde parfaitement avec l'excentricité fournie par les mêmes Tables. Qu'on prenne donc les deux plus grandes équations les plus prochaines;

	La plus grande équation.	L'Excentricité
	$23°, 1', 32''$	0, 20
	$24, 11, 19$	0, 21
Diff.	$1, 9, 47$	0, 01

Enſuite que la moindre équation ſoit ſouſtraite de celle qui eſt propoſée

$$\begin{array}{r} 23°, 42', 40'' \\ 23', 1, 32 \\ \hline 0, 41, 8 \end{array}$$

& qu'on faſſe cette proportion

$$1°, 9', 47'' : 0,01 = 0°,41' 8'' : 0,0058944$$

ce nombre ajouté à la moindre excentricité 0,20, donnera l'excentricité de l'orbite de Mercure $= 0,2058944$, qui ne différe presque point de celle qui a été ſuppoſée, quoique nous ayons donné ici à la plus grande équation $4''$ de plus. En effet cette addition de $4''$ n'augmente que de 0,0000094 le logarithme de l'excentricité, qui etoit auparavant $ln = 9,3136351$.

XXIII. Il faut remarquer ici que les deux parties λ & μ de $\lambda + \mu + n$ eoſ λ croiſſant continuellement, par

l'augmentation de la valeur de l'excentricité n, la troiſieme $n \cos \lambda$ a une plus grande valeur ; puiſque ſa valeur evanouït tant dans le cas de $n = o$ que dans celui de $n = 1$. Pour trouver ce *maximum*, il faut faire attention à l'equation differentielle $dn \cos \lambda = n\, d\lambda \sin \lambda$. Or comme $\sin \lambda$ eſt $= \frac{1 - \sqrt[4]{(1-nn)}}{n}$, ou $n \sin \lambda = 1 - \sqrt[4]{(1-nn)}$, on aura $dn \sin \lambda + n\, d\lambda \cos \lambda = \frac{n\, dn}{2\sqrt[4]{(1-nn)}}$. Qu'on ſubſtituë ici la valeur precedente $d\lambda = \frac{dn \cos \lambda}{n \sin \lambda}$, & cela fera $\frac{1}{\sin \lambda} = \frac{n}{2\sqrt[4]{(1-nn)^3}}$ ou $2\sqrt[4]{(1-nn)^3} = 1 - \sqrt[4]{(1-nn)}$. Qu'on ſuppoſe $\sqrt[4]{(1-nn)} = p$, & $2p^3$ deviendra $= 1 - p$; laquelle équation etant reſoluë par approximation, on trouvera $1p = 9,77067125$, où $p = 0,5897544$, d'où provient $n = 0,9375645$, & cette valeur ſa plus grande de $n \cos \lambda$ deviendra $= 48°, 18', 10'', 40'''$.

Enfin il eſt utile de remarquer ici, que l'excentricité etant $= 0,72388$, la plus grande équation ſera exactement $= 90°$.

Excen-

Excentricité. n	Plus grande equation $\lambda + \mu + n \cos\lambda$	Anomalie excentrique $3^s + \lambda$ λ	Anomalie moyenne $3^s + \lambda + n \cos\lambda$ $\lambda + n \cos\lambda$	Log. dist. au Soleil $la + l\sqrt[4]{(1-nn)}$ $l\sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \cos\lambda$	μ
0, 00	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	0,0000000	0, 0, 0	0, 0, 0
0, 01	1, 8,45	0, 8, 36	0, 42, 59	9,9999891	0, 34, 23	0, 25, 47
0, 02	2, 17, 31	0, 17, 12	1, 25, 58	9,9999565	1, 8,46	0, 51, 34
0, 03	3, 26, 17	0, 25, 48	2, 8, 56	9,9999022	1, 43, 8	1, 17, 22
0, 04	4, 35, 4	0, 34, 24	2, 51, 54	9,9998261	2, 17, 30	1, 43, 10
0, 05	5, 43, 52	0, 43, 1	3, 34, 53	9,9997282	2, 51, 52	2, 8, 59
0, 06	6, 52, 41	0, 51, 38	4, 17, 52	9,9996084	3, 26, 14	2, 34, 49
0, 07	8, 1, 32	1, 0, 16	5, 0, 52	9,9994667	4, 0, 36	3, 0, 40
0, 08	9, 10, 26	1, 8, 55	5, 43, 53	9,9993029	4, 34, 57	3, 26, 33
0, 09	10, 19, 22	1, 17, 35	6, 26, 54	9,9991170	5, 9, 19	3, 52, 28
0, 10	11, 28, 20	1, 26, 16	7, 9, 56	9,9989088	5, 43, 40	4, 18, 24
0, 11	12, 37, 21	1, 34, 59	7, 52, 59	9,9986782	6, 18, 0	4, 44, 22
0, 12	13, 46, 26	1, 43, 43	8, 36, 3	9,9984252	6, 52, 20	5, 10, 23
0, 13	14, 55, 34	1, 52, 28	9, 19, 8	9,9981494	7, 26, 40	5, 36, 26
0, 14	16, 4, 46	2, 1, 15	10, 2, 14	9,9978508	8, 0, 59	6, 2, 32
0, 15	17, 4, 1	2, 10, 3	10, 45, 20	9,9975292	8, 35, 17	6, 28, 41
0, 16	18, 23, 21	2, 18, 53	11, 28, 28	9,9971843	9, 9, 35	6, 54, 53
0, 17	19, 32, 45	2, 27, 45	12, 11, 37	9,9968160	9, 43, 52	7, 21, 8
0, 18	20, 42, 15	2, 36, 39	12, 54, 48	9,9964240	10, 18, 9	7, 47, 27
0, 19	21, 51, 51	2, 45, 36	13, 38, 1	9,9960080	10, 52, 25	8, 13, 50
0, 20	23, 1, 32	2, 54, 35	14, 21, 15	9,9955678	11, 26, 40	8, 40, 17
0, 21	24, 11, 19	3, 3, 37	15, 4, 31	9,9951031	12, 0, 54	9, 6, 48
0, 22	25, 21, 12	3, 12, 41	15, 47, 48	9,9946136	12, 35, 7	9, 33, 24
0, 23	26, 31, 13	3, 21, 49	16, 31, 8	9,9942135	13, 9, 19	10, 0, 5
0, 24	27, 41, 20	3, 31, 0	17, 14, 30	9,9935588	13, 43, 30	10, 26, 50
0, 25	28, 51, 35	3, 40, 14	17, 57, 54	9,9929928	14, 17, 40	10, 53, 41

n	$\lambda + \mu + n \operatorname{cof} \lambda$	λ	$\lambda + n \operatorname{cof} \lambda$	$\sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \operatorname{cof} \lambda$	μ
0, 25	28, 51, 35	3, 40, 14	17, 57, 54	9,9929928	14, 17, 40	10, 53, 41
0, 26	30, 1, 57	3, 49, 31	18, 41, 20	9,9924006	14, 51, 49	11, 20, 37
0, 27	31, 12, 28	3, 58, 52	19, 24, 49	9,9917816	15, 25, 57	11, 47, 40
0, 28	32, 23, 7	4, 8, 16	20, 8, 19	9,9911356	16, 0, 3	12, 14, 48
0, 29	33, 33, 57	4, 17, 45	20, 51, 53	9,9904620	16, 34, 8	12, 42, 4
0, 30	34, 44, 57	4, 27, 18	21, 35, 30	9,9897603	17, 8, 12	13, 9, 27
0, 31	35, 56, 6	4, 36, 55	22, 19, 9	9,9890301	17, 42, 14	13, 36, 56
0, 32	37, 7, 24	4, 46, 36	23, 2, 51	9,9882707	18, 16, 15	14, 4, 33
0, 33	38, 18, 55	4, 56, 22	23, 46, 36	9,9874816	18, 50, 14	14, 32, 19
0, 34	39, 30, 37	5, 6, 13	24, 30, 24	9,9866622	19, 24, 11	15, 0, 12
0, 35	40, 42, 30	5, 16, 9	25, 14, 16	9,9858118	19, 58, 7	15, 28, 14
0, 36	41, 54, 35	5, 26, 10	25, 58, 11	9,9849297	20, 32, 1	15, 56, 24
0, 37	43, 6, 53	5, 36, 17	26, 42, 10	9,9840153	21, 5, 53	16, 24, 43
0, 38	44, 19, 25	5, 46, 30	27, 26, 13	9,9830677	21, 39, 43	16, 53, 12
0, 39	45, 32, 12	5, 56, 50	28, 10, 20	9,9820861	22, 13, 30	17, 21, 52
0, 40	46, 45, 13	6, 7, 16	28, 54, 31	9,9810698	22, 47, 15	17, 50, 42
0, 41	47, 58, 28	6, 17, 48	29, 38, 46	6,9800178	23, 20, 58	18, 19, 42
0, 42	49, 12, 0	6, 28, 28	30, 23, 69	9,9789291	23, 54, 38	18, 48, 54
0, 43	50, 25, 49	6, 39, 15	31, 7, 31	9,9778027	24, 28, 16	19, 18, 18
0, 44	51, 39, 55	6, 50, 10	31, 52, 1	9,9766376	25, 1, 51	19, 47, 54
0, 45	52, 54, 19	7, 1, 12	32, 36, 35	9,9754327	25, 35, 22	20, 17, 43
0, 46	54, 9, 0	7, 12, 23	33, 21, 14	9,9741866	26, 8, 51	20, 47, 45
0, 47	55, 24, 2	7, 23, 43	34, 6, 0	9,9728983	26, 42, 17	21, 18, 2
0, 48	56, 39, 26	7, 35, 13	34, 50, 53	9,9715663	27, 15, 40	21, 48, 33
0, 49	57, 55, 10	7, 46, 52	35, 35, 51	9,9701891	27, 48, 59	22, 19, 19
0, 50	59, 11, 15	7, 58, 40	36, 20, 54	9,9687653	28, 22, 14	22, 50, 21

n	$\lambda + \mu + n \operatorname{col}\lambda$	λ	$\lambda + n \operatorname{col}\lambda$	$\sqrt[4]{(1-nn)}$	$n \operatorname{col}\lambda$	μ
0,50	59,11,15	7, 58, 40	36, 20, 54	9,9687653	28,22,14	22,50,21
0,51	60,27,44	8, 10, 39	37, 6, 4	9,9672932	28,55,25	23,21,40
0,52	61,44,36	8, 22, 49	37, 51, 21	9,9657712	29,28,32	23, 53, 15
0,53	63, 1,56	8, 35, 12	38, 36, 47	9,9641973	30, 1,35	24,25, 9
0,54	64,19,41	8, 37, 47	39, 12, 20	9,9625696	30,34,33	24,57,21
0,55	65,37,52	8, 50, 34	39, 58, 0	9,9608860	31, 7,26	25,29,52
0,56	66,56,30	9, 13, 33	40,53, 47	9,9591443	31,40,14	26, 2,43
0,57	68,15,42	9, 26, 49	41, 39, 46	9,9573420	32, 12,57	26,35,56
0,58	69,35,25	9, 40, 18	42, 25, 52	9,9554766	32,45,34	27, 9,33
0,59	70,55,43	9, 54, 2	43, 12, 6	9,9535452	33,18, 4	27,43,37
0,60	72,16,32	10, 8, 2	43, 58, 30	9,9515450	33,50,28	28,18, 2
0,61	73,37,58	10, 22, 20	44, 45, 5	9,9494726	34,22,45	28,52,53
0,62	75, 0, 4	10, 36, 58	45,31, 53	9,9473246	34,54,55	29,28,11
0,63	76,22,51	10, 51, 55	46, 18, 52	9,9450973	35,25,57	30, 3,59
0,64	77,46,18	11, 7, 11	47, 6, 2	9,9427866	35,58,51	30,40,16
0,65	79,10,28	11, 22, 49	47, 53, 25	9,9403880	36,30,36	31,17, 3
0,66	80,35,30	11, 38, 51	48, 41, 2	9,9378967	37, 2,11	31,54,28
0,67	82, 1,18	11, 55, 16	49, 28, 53	9,9353076	37,33,37	32,32,25
0,68	83,27,53	12, 12, 6	50, 16, 57	9,9326148	38, 4,51	33,10,56
0,69	84,55,28	12, 29, 25	51, 5, 19	9,9298121	38,35,54	33,50, 9
0,70	86,24, 2	12, 47, 13	51, 53, 57	9,9268925	39, 6,44	34,30, 5
0,71	87,53,37	13, 5, 32	52, 42, 53	9,9238485	39,37,21	35,10,44
0,72	89,24,21	13, 24, 26	53, 32, 9	9,9206716	40, 7,43	35,52,12
0,73	90,56,15	13, 43, 56	54, 21, 45	9,9173525	40,37,49	36,34,30
0,74	92,29,23	14, 4, 5	55, 11, 42	9,9138806	41, 7,37	37,17,41
0,75	94, 3,53	14, 24, 55	56, 2, 3	9,9102445	41,37, 8	38, 1,50

n	$\lambda + \mu + n \cos \lambda$	λ	$\lambda + n \cos \lambda$	$\sqrt[4]{V}\,(1 - nn)$	$n \cos \lambda$	μ
0.75	94. 3.53	14.24.55	56. 2. 3	9.9102445	41.37. 8	38. 1.50
0.76	95.39.51	14.46.32	56.52.50	9.9064310	42. 6.18	38.47. 1
0.77	97.17.19	15. 8.57	57.44. 2	9.9024253	42.35. 5	39.33.17
0.78	98.56.26	15.32.15	58.35.41	9.8982107	43. 3.26	40.20.45
0.79	100.37.21	15.56.31	59.27.51	9.8937681	43.31.20	41. 9.30
0.80	102.20.17	16.21.53	60.20.39	9.8890756	43.58.46	41.59.38
0.81	104. 5.23	16.48.26	61.14. 4	9.8841080	44.25.38	42.51.19
0.82	105.52.41	17.16.16	62. 8. 7	9.8788360	44.51.51	43.44.40
0.83	107.42.42	17.45.33	63. 2.53	9.8732250	45.17.20	44.39.49
0.84	109.45.27	18.16.27	63.58.28	9.8672344	45.42. 1	45.46.59
0.85	111.31.31	18.49.14	64.55. 5	9.8608157	46. 5.51	46.36.26
0.86	113.31.59	19.24. 1	65.52.38	9.8539102	46.28.37	47.38.21
0.87	115.34.16	20. 1. 8	66.51.16	9.8464462	46.50. 8	48 43. 0
0.88	117.42.10	20.41. 1	67.51.14	9.8383348	47.10.13	49.50.56
0.89	119.55.28	21.24. 3	68.52.41	9.8294636	47.28.38	51. 2.47
0.90	122.14.47	22.10.54	69.55.53	9.8196884	47.44.59	52.18.54
0.91	124.41.47	23. 2.12	71. 1. 5	9.8088189	47.58.53	53.39.42
0.92	127.15.18	23.59. 7	72. 8.42	9.7965978	48. 9.35	55. 6.36
0.93	130. 0.21	25. 2.51	73.19.17	9.7826638	48.16.26	56.41. 4
0.94	132.59.48	26.15.49	74.33.48	9.7664882	48.17.59	58.25. 0
0.95	136.13.59	27.40.23	75.52.40	9.7472511	48.12.17	60.20.19
0.96	139.50.41	29.22.17	77.18.18	9.7235790	47.56. 1	62.32.23
0.97	144. 1.57	31.30.30	78.53.24	9.6928969	47.22.54	65. 8.33
0.98	149. 8.43	34.25. 1	80.44.15	9.6494238	46.19.14	68,24.28
0.99	156.10.30	39. 6.11	83. 7.14	9.5747133	44. 1. 3	73. 3.16
1.00	180 0. 0	90. 0 0	90. 0. 0	$-\infty$	0. 0. 0	90. 0. 0
9375645	132.13.33	25.56.55	74.15. $5\frac{2}{3}$	9.7706712$\frac{1}{2}$	48.18.10$\frac{2}{3}$ maximum.	57.58.27$\frac{2}{3}$

OBSER-